ΔΥΝΑΜΟΣΥΝΟΛΑ

Ασκηση 1η: Έστω σύνολα A και B. Να αποδείξετε ότι:

$A \neq B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \neq \mathcal{P}(B)$

ΛΥΣΗ

$(\Rightarrow)$: Έστω $A \neq B \Rightarrow \underbrace{[(\exists x): x \in A \wedge x \notin B]}_{①} \vee \underbrace{[(\exists x): x \in B \wedge x \notin A]}_{②}$

①: $(\exists x): x \in A \wedge x \notin B \Leftrightarrow \{x\} \subseteq A \wedge \{x\} \nsubseteq B \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \{x\} \in \mathcal{P}(A) \wedge \{x\} \notin \mathcal{P}(B) \Rightarrow \mathcal{P}(A) \neq \mathcal{P}(B)$

②: $(\exists x): x \in B \wedge x \notin A \Leftrightarrow \{x\} \subseteq B \wedge \{x\} \nsubseteq A \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \{x\} \in \mathcal{P}(B) \wedge \{x\} \notin \mathcal{P}(A) \Rightarrow \mathcal{P}(A) \neq \mathcal{P}(B)$.

Επομένως, και στις 2 περιπτώσεις $\mathcal{P}(A) \neq \mathcal{P}(B)$

$(\Leftarrow)$: Ας είναι $\mathcal{P}(A) \neq \mathcal{P}(B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{[(\exists X): X \in \mathcal{P}(A) \wedge X \notin \mathcal{P}(B)]}_{①'} \vee \underbrace{[(\exists X): X \in \mathcal{P}(B) \wedge X \notin \mathcal{P}(A)]}_{②'}$

①': $(\exists X): X \in \mathcal{P}(A) \wedge X \notin \mathcal{P}(B) \Leftrightarrow (\exists X \neq \emptyset): X \subseteq A \wedge X \nsubseteq B \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\exists x): x \in X \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow A \neq B$.

②': $(\exists X): X \in \mathcal{P}(B) \wedge X \notin \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow (\exists X \neq \emptyset): X \subseteq B \wedge X \nsubseteq A \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\exists x): x \in X \wedge x \notin A \Leftrightarrow x \in B \wedge x \notin A \Rightarrow A \neq B$.

Ασκηση 2: Έστω σύνολα A και B. Να αποδείξετε ότι:

$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \emptyset$

ΛΥΣΗ

Έστω $A \cap B = \emptyset$ και $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \neq \emptyset$.

Άρα, $(\exists X)\ X \neq \emptyset : X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A) \wedge X \in \mathcal{P}(B) \Rightarrow$

$\Rightarrow X \subseteq A \wedge X \subseteq B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in (A \cap B)$ Άτοπο

Αντίστροφα,

Έστω $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \emptyset$ και $A \cap B \neq \emptyset$

Άρα, $(\exists x) : x \in A \cap B \Rightarrow \{x\} \subseteq A \wedge \{x\} \subseteq B \Rightarrow$

$\Rightarrow \{x\} \in \mathcal{P}(A) \wedge \{x\} \in \mathcal{P}(B) \Rightarrow \{x\} \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

$\Rightarrow \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \neq \emptyset$ Άτοπο

<u>Άσκηση 3</u>: Να βρείτε τα ακόλουθα δυναμοσύνολα:

i) $\mathcal{P}(\{a,b\})$

ii) $P(\emptyset)$ & $P(\{\emptyset\})$

iii) $P(P(\{a\}))$

<u>ΛΥΣΗ</u>

i) $P(\{a,b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$

ii) $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$ & $P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

iii) $P(P(\{a\})) = P(\{\emptyset, \{a\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{a\}, \{\emptyset, \{a\}\}\}$